

LNF-62/67

R. Balzano, G. Sacerdoti, F. Uccelli: **TEORIA LINEARE DELLE
MACCHINE ACCELERATRICI.**

Nota interna: n. 155

3 Agosto 1962 (ristampa: 22. 1. 1963.)

LNF-62/67

Nota interna: n° 155
3 Agosto 1962

R. Balzano^(x), G. Sacerdoti, F. Uccelli^(°): TEORIA LINEARE DELLE MACCHINE ACCELERATRICI.

Parte I: Equazioni lineari del moto e coefficienti di smorzamento delle oscillazioni di betatrone nel caso di foccheggiamento debole.

Introduzione

Nelle macchine acceleratrici circolari le particelle sono soggette in generale:

- 1) all'azione del campo magnetico di guida;
- 2) al sistema di accelerazione a RF;
- 3) alla perdita di energia per irraggiamento proprio (o coerente con le altre particelle);
- 4) all'azione delle altre particelle cariche che circolano nell'anello della macchina;
- 5) agli urti contro le molecole dei gas residui all'interno della ciambella.

I meccanismi con cui questi effetti influenzano il moto delle particelle sono stati ampiamente studiati e nella letteratura si trovano i risultati di questi studi⁽¹⁻⁵⁾.

Nella presente relazione ed in quelle che ci ripro

(x) Laureando presso il gruppo magneti dei Lab. di Frascati.
(°) Sezione dell'I.N.F.N. di Pisa.

mettiamo di far seguire, cercheremo di raccogliere ed esprimere in modo unitario la teoria lineare (cioè nella approssimazione di Gauss) del moto di particelle relativistiche in una macchina acceleratrice e i risultati che da questa teoria si possono dedurre.

Presupponiamo che per una particella di un dato momento p_0 , esista un'orbita chiusa s_0 , cioè un'orbita che, a prescindere dal campo di accelerazione a RF, dalla variazione del campo magnetico $\frac{\partial B}{\partial t}$, dalla perdita di energia per irraggiamento e dagli urti contro le molecole del gas, viene ripercorsa identicamente ad ogni giro. Qualora la velocità iniziale delle particelle sia tangente a detta curva, tale orbita chiusa s_0 viene percorsa in un tempo di rivoluzione $T_0 = \frac{N}{f_0}$ (f_0 = frequenza della RF, N armonica della RF).

Prescinderemo nel seguito dal caso in cui si abbia degenerazione, e cioè quando:

- a) esiste, nell'approssimazione lineare, una molteplicità di orbite chiuse che si intersecano tra di loro (corrispondente ad un dato momento p_0);
- b) il tempo di rivoluzione non è funzione del momento p_0 della particella (sempre prescindendo dalla variazione del campo magnetico, dalla RF, etc.).

Nel caso a) si hanno risonanze di betatrone⁽¹⁾, mentre il caso b) interessa in pratica solo il comportamento dei protosincrotroni quando le particelle raggiungono la "energia di transizione".

§ 1 - Equazioni linearizzate del moto.

Una particella è individuata dai seguenti parametri:

s = coordinata curvilinea dell'orbita;

$x(s)$ = scostamento radiale della particella rispetto alla orbita di equilibrio s_0 (v. fig. 1);

$x'(s) = dx/ds$ = inclinazione orizzontale della particella;

$\frac{\Delta p(s)}{p_0}$ = scostamento in momento rispetto a p_0 (p_0 è il momento a cui corrisponde la frequenza di rivoluzione f_0 pari alla frequenza della RF);

$\Delta \varphi(s)$ = scostamento di fase della particella rispetto alla fase della RF;

$z(s)$ = scostamento verticale della particella rispetto all'orbita di equilibrio;

$z'(s) = dz/ds$ = inclinazione verticale della particella.

Le grandezze ora esaminate possono considerarsi un esavettore nello spazio della fasi, che simbolicamente in dichiamo con $\{X\}$.

L'equazione del moto in forma differenziale è data da:

$$(1) \quad |X| = |M_0| |X_0| + |E_1(y)| |X_0| - |E_1(y)| - |E_2 \left(\frac{\partial B_0}{\partial t} \right)| - |E_3| - |E_4| |X_0|$$

ove i simboli hanno il seguente significato:

$$(2) \quad |X| = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \\ \Delta \varphi \\ Z \\ Z' \end{pmatrix} \quad \text{(valore dell'esavettore alla coordinata } s=s_0 + ds)$$

$$(3) \quad |X_0| = \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \\ \frac{\Delta p}{p_0} \\ \Delta \varphi_0 \\ Z_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} \quad \text{(valore dell'esavettore alla coordinata } s = s_0)$$

$$(4) \quad |M_0| = \begin{vmatrix} 1 & ds & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(1-n)ds}{R_0^2} & 1 - \frac{V \cos \psi_0 ds}{E_0} & \frac{ds}{R_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial R} \frac{ds}{E_0} & 0 & 1 & \frac{V \sin \psi_0 ds}{E_0} & 0 & 0 \\ -\frac{N}{R_0} ds & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ds \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{nds}{R_0^2} & 1 - \frac{V \sin \psi_0 ds}{E_0} \end{vmatrix}$$

Nella matrice $|M_0|$ i simboli rappresentano:

ds = elemento di traiettoria (in m)

V = campo elettrico (in V/m)

E_0 = energia delle particelle (in elettronVolt)

ψ_0 = fase di entrata della particella nella RF

$n = -\frac{\partial B}{\partial R} \frac{R_0}{B_0}$ = indice di campo

N = numero dell'armonica del campo di accelerazione.

In $|M_0|$ alcuni termini (contrassegnati con l'asterisco) derivano dalla presenza della RF, il termine m_{31} deriva dal campo elettrico associato alla variazione del campo magnetico e gli altri termini derivano dalla presenza del gradiente di campo magnetico⁽¹¹⁾.

Ricordiamo che $|M_0|$ si può scrivere come $|M_0|_h + |M_0|_v$

e cioè

$$(5) \quad |M_0| = \begin{vmatrix} \boxed{\times} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\times} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\times} \end{vmatrix}$$

E_0 rappresenta il contributo all'accelerazione dovuto alla RF, ed è dato da

$$(6) \quad |E_0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v \sin \theta_0}{\epsilon_0} ds \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici $|M_1(y)|$, $|E_1(y)|$, rappresentano la perturbazione introdotta nel moto dall'irraggiamento della particella. Se si trascura la dispersione angolare dell'irraggiamento (per altro inferiore in angolo a $\frac{m_0 c^2}{\epsilon_0}$) queste matrici assumono un'aspetto particolarmente semplice e precisamente:

$$(7) \quad |M_1(y)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h y \omega_c N_0^* \frac{(1-2n)}{R_0} ds & 0 & 2 h y \omega_c N_0^* ds & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad |E_1(y)| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h y \omega_c N^* ds \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$h = 6,6237 \times 10^{-34} \text{ Joule sec}$$

$$c = \text{velocità della luce} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

$$w = \text{frequenza della radiazione emessa} (\text{sec}^{-1})$$

$$y = w/w_c = \text{variabile casuale il cui valor medio è}$$

$$\bar{y} = \bar{w}/w_c = 0,304$$

$$w_c = 3/2 \frac{c}{R} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 (\text{sec}^{-1})$$

$$N^* = \frac{\bar{N}}{c \epsilon_0} = 1,42 \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{ch} \left(\frac{e^2}{R} \right) \frac{1}{m_0 c^2}$$

\bar{N} = numero totale di quanti irraggiati per unità di tempo

$$= \frac{5,22 w_c c}{4\pi \epsilon_0 h}$$

$$c = \frac{3^{1/2}}{4\pi} \frac{e^2}{R} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 \frac{1}{w_c^2} (\text{unità MKSQ})$$

$\frac{c}{N}$ = cammino medio delle particelle tra due emissioni suc-

cessive; $N_0^* w_c c$, valori di N^* , w_c , per $E = E_0$; $R=R_0$

$$\sqrt{|y - \bar{y}|^2} = \sqrt{0,32}.$$

Ricordiamo che valgono le seguenti relazioni (6-7)

$$(9) \quad \bar{w} = \frac{w_c \int_0^\infty y \left[\frac{P(y)}{hy} \right] dy}{\int_0^\infty \frac{P(y)}{hy} dy}, \quad P(y) = w_c c y \Phi(y); \quad \Phi(y) = \int_y^\infty f_2(\eta) d\eta$$

Nei grafici 1,2,3,4 sono riportati in funzione di R e per diversi valori di $K = \frac{E}{m_0 c^2}$, gli andamenti di w_c , \bar{N} , c/N , $h \bar{w} N^*$.

La matrice $\left| E_2 \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \right|$ rappresenta il cosiddetto "effetto di betatrone" (per cui una variazione nel tempo del campo magnetico è equivalente ad una variazione del momento della particella).

E sarà:

$$(10) \quad \left| E_2 \left(\frac{\partial B_0}{\partial t} \right) \right| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{ds}{B_0} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

I termini $|E_3| + |E_4| \cdot |X_0|$ rappresentano l'influenza della carica spaziale e degli urti contro le molecole dei gas residui.

L'influenza della carica spaziale può essere di due origini:

- a) la carica spaziale di un fascio di particelle di carica concorde e che si muove sulla stessa curva;
- b) la carica spaziale di un fascio di particelle che interseca un fascio di particelle di carica opposta.

Nel caso a) le particelle sono soggette per tutto il tempo della loro permanenza nella macchina acceleratrice all'azione del campo elettrico delle altre particelle.

Nel caso b) l'azione delle particelle di segno opposto si fa sentire solo nell'istante di intersezione dei due fasci e può considerarsi come l'azione di una lente concentrata; la influenza diventa allora del tipo

$$|E_4| \cdot |X_0|$$

§ 2 - Confronto tra le forze reciproche delle particelle di un pacchetto e quelle magnetiche di richiamo.

Per avere un'idea delle forze elettrostatiche che agiscono sul pacchetto di particelle in confronto alle for

ze di richiamo esercitate dal campo magnetico, riportere-
mo le espressioni di dette forze:

$$(11) \quad F_{B_0} = eZ \frac{dB_z}{dz} c = \frac{eB_0(1-n)zC}{R_0}$$

$$(12) \quad F_{es} = \frac{eN}{2L\Delta R\Delta z} e f(z)$$

(vedi fig. 2)

Se desideriamo una indicazione delle dimensioni
minime che il fascio può avere, sarà sufficiente imporre:

$$F_{B_0} = F_{es}$$

Se ad es. abbiamo

$$B_0 = 1 \text{ Wb/m}^2$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

$$R_0 = 2 \text{ m}$$

$$\Delta R = \Delta z = 2z$$

$$N = 10^{13}$$

$$f(z) = z$$

$$L_0 = \text{variabile (in m)}$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ coulombs}$$

$$n = 0,5$$

$$e_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ unità MKSQ}$$

dato che la dimensione media radiale risulta:

$$(*) \quad z = \sqrt{\frac{eNR_0}{4\pi L 4\pi\epsilon_0(1-n)B_0c}} = 0,345 \times 10^{-2} L^{-\frac{1}{2}}$$

potremo ottenere la seguente tabella:

(**)

L(m)	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$
Z(mm)	34,5	24,1	19,2	17,2

§ 3 - Discussione della matrice delle oscillazioni verticali

In questo paragrafo, facendo riferimento alla e-

spressione (1), porremo per ipotesi $|E_3| = 0$, $|E_4| = 0$.

E inoltre ricordiamo che ψ_0 , fase della radiofrequenza, è determinata dalla uguaglianza:

$$\frac{V_{scu} \psi_0}{E_0} = \text{energia media irradiata} + \text{termini di betatrone.}$$

Come è facile vedere, la matrice delle oscillazioni verticali (per un tratto infinitesimo) si riduce a:

$$(13) \quad |M_0|_V = \begin{vmatrix} 1 & ds \\ E ds & 1 - \beta ds \end{vmatrix}$$

ponendo

$$(*) \quad \begin{cases} \beta = \frac{V_{scu} \psi_0}{E_0} \\ \epsilon = -\frac{n}{R_0^2} \end{cases}$$

Occorre dare l'espressione della matrice verticale relativa ad un tratto finito di spazio. E' quindi necessario ricavare gli autovalori e le matrici diagonalizzanti.

Gli autovalori risultano:

$$(14a) \quad \lambda_1 = 1 - \left(\frac{\beta}{2} + i\omega_B \right) ds; \quad \text{con } i\omega_B = \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \epsilon}$$

$$(14b) \quad \lambda_2 = 1 - \left(\frac{\beta}{2} - i\omega_B \right) ds;$$

Le matrici diagonalizzanti risultano:

$$(15a) \quad |m_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\left(\frac{\beta}{2} + i\omega_B\right) & -\left(\frac{\beta}{2} - i\omega_B\right) \end{vmatrix}$$

$$(15b) \quad |m_{ki}^{-1}| = \begin{vmatrix} -\frac{\beta}{4i\omega_B} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i\omega_B} \\ \frac{\beta}{4i\omega_B} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2i\omega_B} \end{vmatrix}$$

Si presentano ora due differenti casi:

- 1) $\beta =$ costante $\neq 0$; questo caso si ha quando la particella si muove su una circonferenza; il campo magnetico è statico e si ha irraggiamento.
- 2) $\beta =$ variabile; è il caso in cui è presente anche il campo magnetico variabile e il raggio di curvatura cambia lungo la traiettoria.

Nel primo caso la matrice relativa ad un tratto finito di lunghezza $L = \int_0^L ds$ risulta:

$$(16) \quad |M_0|_v = \prod |m_{ik}| |e^{\lambda_{k-1}}| |m_{ki}^{-1}|$$

e si ottiene, eseguiti i calcoli:

$$(17) \quad |M_0(L)|_v = e^{-\frac{\beta}{2}L} \begin{vmatrix} \cos \omega L + \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega L & \frac{1}{\omega} \sin \omega L \\ \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega L & \cos \omega L - \frac{\beta}{2\omega} \sin \omega L \end{vmatrix}$$

E' possibile notare che la matrice ottica risulta tutta moltiplicata per il termine $e^{-(\beta/2)L}$. Quindi $\beta/2$ viene a rappresentare il coefficiente di smorzamento delle oscillazioni.

Nel secondo caso (che si riscontra quanto nel sincrotrone vi è accelerazione delle particelle), occorre calcolare in altro modo la (16). L'espressione diviene:

$$|M_0(\beta)|_v = \prod |m_{ik}(\beta)| |e^{\lambda_{k(\beta)}-1}| |m_{ki}^{-1}(\beta)|$$

Ora, essendo β inversamente proporzionale a ξ ,
 e quindi a s , (dato che l'energia si può supporre lineare
 con s), segue che è:

$$\beta = \frac{\beta_0 s_0}{s}$$

con $\beta_0 s_0$ costante di proporzionalità. Per cui β subisce in
 un tratto ds un incremento pari a:

$$d\beta = - \frac{\beta_0 s_0}{s^2} ds$$

Nel corso delle diagonalizzazioni, i prodotti

$$| m_{ik}^{-1}(\beta + d\beta) | | m_{ik}(\beta) |$$

a causa della variazione di β non danno più come risulta-
 to una matrice unitaria, bensì otteniamo:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{ig}{4\omega_B} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} ds$$

ove abbiamo posto

$$g = - \frac{\beta_0 s_0}{s^2}$$

Ora, tenendo conto della (18) e indicando con $|ib|$
 ds la matrice (funzione di s) ivi aggiunta alla unitaria,
 risulta:

$$\begin{aligned} & \prod_0^L | m_{ik}(\beta) | | e^{\lambda^{-1}} | | m_{ik}^{-1}(\beta) | = \\ & = | m_{ik}(\beta_0) | | e^{\lambda^{-1}} | (|1+|ib|ds|)^{\lambda-1} \dots (|1+|ib|ds|)^{\lambda-1} | e^{\lambda^{-1}} | | m_{ki}^{-1}(\beta_0) | = \\ & = | m_{ik}(\beta_0) | | e^{\int_{s_0}^L \lambda^{-1} ds} | | m_{ik}^{-1}(\beta_0) | + \int_{s_0}^L | m_{ik}(\beta) | | e^{\int_{s_0}^s \lambda^{-1} ds} | | |ib| | e^{\int_{s_0}^{s-1} \lambda^{-1} ds} | | m_{ki}^{-1}(\beta_0) | ds + \\ & + \int_{s_0}^L | m_{ik}(\beta) | | e^{\int_{s_0}^s \lambda^{-1} ds} | | |ib| | e^{\int_{s_0}^{s-1} \lambda^{-1} ds} | | e^{\int_{s_0}^s \lambda^{-1} ds} | | |ib| | e^{\int_{s_0}^{s-1} \lambda^{-1} ds} | | m_{ki}^{-1}(\beta_0) | ds + \dots \end{aligned}$$

ove

$$\begin{cases} \beta_1 \rightarrow \text{valore di } \beta \text{ per } s=L \\ \beta_0 \rightarrow \text{valore di } \beta \text{ per } s=s_0 \end{cases}$$

(per il procedimento vedi ref. (8)).

Ora come abbiamo detto, se g è sufficientemente piccolo, la sommatoria degli infiniti termini che compare nello sviluppo del prodotto (19) può essere arrestata al primo termine (v. append. 1).

In tal modo otteniamo:

$$\begin{aligned} & \left| a_{ik}(\beta_1) \right| \left| e^{\int_{s_0}^L \beta ds} \right| \left| m_{ki}^{-1}(\beta_0) \right| = \\ & = e^{\frac{1}{2} \int_{s_0}^L \beta ds} \left| \begin{array}{cc} \cos \theta + \frac{\beta_0}{2\omega_0} \sin \theta & \frac{1}{\omega_0} \sin \theta \\ \frac{\omega_1(\beta_0 - \omega_0 \beta_1)}{2\omega_0} \sin \theta - \frac{\beta_0 \beta_1 + 4\omega_0 \omega_1}{4\omega_0} \sin \theta, & \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \theta - \frac{\beta_1}{2\omega_0} \sin \theta \end{array} \right| \\ & \approx e^{-\frac{1}{2} \int_{s_0}^L \omega_2 ds} \left| \begin{array}{cc} \omega_0 \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0) & \frac{R_0 \sin \theta}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0) \\ -\frac{\sqrt{n}}{R_0} \sin \theta \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0) & \omega_0 \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0) \end{array} \right| \end{aligned}$$

ove:

$$\theta = \int_{s_0}^L \omega_2 ds \approx \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{-\left(\frac{\beta_0^2}{4} + \varepsilon\right)} \approx \frac{\sqrt{n}}{R_0}$$

$$\omega_1 = \sqrt{-\left(\frac{\beta_1^2}{4} + \varepsilon\right)} \approx \frac{\sqrt{n}}{R_0}$$

trascurando, all'interno di ω_2 , la grandezza $\beta^2/4$.

Il fattore di smorzamento, che moltiplica la matrice ottica, risulta quindi, nel caso di β variabile, pari a $e^{-\frac{1}{2} \int_{s_0}^L \beta ds}$.

Ora, essendo

$$\beta ds = \frac{dE}{E_0}$$

risulta, per il termine di smorzamento:

$$e^{-\frac{1}{2} \int \frac{dE}{E_0}} = \sqrt{\frac{E}{E_0}} = \sqrt{\frac{B_0}{B}}$$

Questo risultato si ottiene di solito dal teorema di Liouville o dalle equazioni della dinamica.

Proponiamoci di trovare inoltre la costante di smorzamento verticale, che indicheremo con τ_{ov} sarà:

$$e^{-\frac{1}{2} \int \beta ds} = e^{-\frac{t}{\tau_{ov}}}$$

per cui, esprimendo il valore di τ_{ov} mediante il valore medio di β (che indicheremo con $\bar{\beta}$) lungo l'orbita chiusa di equilibrio s_0 , avremo:

$$\frac{1}{2} \int \beta ds = \frac{1}{2l_0} \int \beta ds$$

(l_0 = lunghezza dell'orbita s_0)

Ed essendo, nel nostro caso,

$$\bar{\beta} = \frac{v_{syn}^2}{E_0} = h \bar{\gamma} \omega_c N^*$$

sostituendo otteniamo (9)(10):

$$\tau_{ov}^{-1} = \frac{4,22 \times 10^{-6} E_0^3}{2l_0} \int \frac{ds}{R^2}$$

(formula nota nella letteratura (9) (10)).

§ 4 - Discussione della matrice delle oscillazioni orizzontali nel caso di foccheggiamento debole.

Nel caso generale delle macchine acceleratrici è

soddisfatta la relazione:

$$(*) \quad \frac{V \omega \psi_0}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2 R_0} \frac{dB}{dt} + h \bar{\omega} N^*$$

La matrice delle oscillazioni orizzontali diviene allora:

$$(21) \quad |M_0| = \begin{vmatrix} 1 & ; & ds & ; & 0 & ; & 0 \\ -\frac{(1-n)}{R_0^2} ds & ; & 1 - h \bar{\omega} N^* ds - \frac{1}{c B_0} \frac{\partial B}{\partial t} ds & ; & \frac{ds}{R_0} & ; & 0 \\ -\frac{h \bar{\omega} N^*}{R_0} (1-2n) ds + \frac{1}{2 \varepsilon_0} \frac{dB}{dt} ds & ; & 0 & ; & 1 - 2 h \bar{\omega} N^* ds & ; & \frac{V \omega \psi_0}{\varepsilon_0} ds \\ -\frac{N}{R_0^2} ds & ; & 0 & ; & 0 & ; & 1 \end{vmatrix}$$

E' opportuno, per ricavare le traiettorie del moto, risolvere l'equazione secolare tratta dalla matrice medesima, che risulta:

$$(22) \quad x^4 - \left(2h \bar{\omega} N^* - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{1}{c B_0} \right) x^3 + \left[2h \bar{\omega} N^* \left(h \bar{\omega} N^* + \frac{1}{c B_0} \frac{\partial B}{\partial t} \right) + \frac{(1-n)}{R_0^2} \right] x^2 - \left[(3-4n) \frac{h \bar{\omega} N^*}{R_0^2} - \frac{1}{2 R_0 \varepsilon_0} \frac{\partial B}{\partial t} \right] x + \frac{V N \omega \psi_0}{R_0^3 \varepsilon_0} = 0$$

con

$$x = \frac{1-\lambda}{ds}$$

Per ottenere le soluzioni, opereremo in questo modo: tenendo presente che i termini in $\frac{\partial B}{\partial t}$, N^* , V sono trascurabili rispetto ai termini ove compare n , è possibile trasformare l'equazione secolare completa nella e-

quazione semplificata (biquadratica, e quindi facilmente risolvibile) che riportiamo qui sotto:

$$(23) \quad X^4 + \frac{(1-n)}{R_0^2} X^2 + \frac{NV \cos \varphi_0}{R_0^3 \epsilon_0} = 0$$

Le sue soluzioni risultano:

$$(24a) \quad X_1 = i \frac{\sqrt{1-n}}{R_0} \qquad X_3 = i \sqrt{\frac{NV \cos \varphi_0}{R_0^3 \epsilon_0 (1-n)}}$$

$$(24b) \quad X_2 = -i \frac{\sqrt{1-n}}{R_0} \qquad X_4 = -i \sqrt{\frac{NV \cos \varphi_0}{R_0^3 \epsilon_0 (1-n)}}$$

A queste radici, essendo immaginarie, corrispondono soluzioni oscillatorie del moto. Per ricavare gli smorzamenti è necessario valutare la parte reale delle radici della equazione secolare (22). Ciò è semplice perchè già si conoscono le soluzioni approssimate (che sono le soluzioni (24)). La correzione Δx che bisogna apportare a queste soluzioni in prima approssimazione dell'equazione secolare (22) può ricavarsi col metodo delle tangenti e si ottiene con la formula

$$\Delta x_i = - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

La parte reale di Δx_i rappresenta lo smorzamento delle oscillazioni.

Eseguendo i calcoli, otteniamo, trascurati i termini quadratici in $V, \frac{\partial B}{\partial t}, h \bar{\omega} N^*$:

$$(25a) \quad \Delta X_1(\text{reale}) = \Delta X_2(\text{reale}) = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{1-n} h \bar{\omega} N^* + \frac{2n-1}{2(1-n)} \frac{1}{c B_0} \frac{\partial B}{\partial t} \right]$$

$$(25b) \quad \Delta X_3(\text{reale}) = \Delta X_4(\text{reale}) = \frac{1}{2} \left[\frac{3-4n}{1-n} h \bar{\omega} N^* - \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{c B_0} \frac{\partial B}{\partial t} \right]$$

(ricordando che $cB_0R_0 = \xi_0$).

Qualora sia n costante (focheggiamento debole), i termini dovuti all'irraggiamento siano piccoli, ed in caso di assenza di variazione temporale di campo magnetico ($\frac{\partial B}{\partial t} = 0$), sostituendo ad N^* il proprio valore, otteniamo, con procedimento analogo a quello svolto per la ricerca della costante di smorzamento verticale:

$$(26) \quad \tau_{OR}^{-1} = \frac{n}{1-n} \tau_{OV}^{-1}$$

$$(27) \quad \tau_{OS}^{-1} = \frac{3-4n}{1-n} \tau_{SV}^{-1}$$

che coincidono con le formule note nella letteratura⁽⁹⁻¹⁰⁾.

Nella prossima relazione ricaveremo la matrice delle oscillazioni orizzontali relativa ad un tratto finito di traiettoria, ed esamineremo il comportamento delle particelle in caso di strong-focusing, con particolare riguardo alle dimensioni del fascio, tenendo anche conto delle fluttuazioni statistiche dovute all'irraggiamento.

Appendice I

Calcolo del secondo termine della sommatoria (19)

Si ha:

$$(28) \quad \int \left| m_{ik}(\beta_0) \right| e^{-\int_{s_0}^L \lambda(\beta) ds} \left| i b \right| e^{\int_{s_0}^L \lambda(\beta) ds} \left| m_{ki}^{-1}(\beta_0) \right| ds =$$

$$= \frac{\beta_0 s_0}{4} e^{-\frac{1}{2} \int_{s_0}^L \beta ds} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

dove:

$$m_{11} = \int_{s_0}^L \left(-\sin \theta + \frac{\beta_0}{2u\beta} \cos \theta - \sin \delta - \frac{\beta_0}{2u\beta} \cos \delta \right) \frac{ds}{u\beta s^2} \approx$$

$$- \frac{R_0}{\sqrt{n}} \int_{s_0}^L (\cos \theta + \sin \delta) \frac{ds}{s^2}$$

$$m_{12} = \int_{s_0}^L \left(\frac{1}{u\beta} \cos \theta - \frac{1}{u\beta} \cos \delta \right) \frac{ds}{u\beta s^2} \approx \frac{R_0^2}{n} \int_{s_0}^L (\cos \theta - \cos \delta) \frac{ds}{s^2}$$

$$m_{21} = \int_{s_0}^L \left[\left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{R_0 u \beta}{2u\beta} \right) \sin \theta - \left(u\beta + \frac{\beta_0 \beta_1}{4u\beta} \cos \theta + \left(\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2u\beta} \right) \sin \delta + \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(u\beta - \frac{R_0 \beta_1}{4u\beta} \right) \cos \delta \right] \frac{ds}{u\beta s^2} \approx \int_{s_0}^L (\cos \theta + \sin \delta) \frac{ds}{s^2}$$

$$m_{22} = \int_{s_0}^L \left(-\frac{\beta_1}{2u\beta} \cos \theta - \frac{u\beta}{u\beta} \sin \theta + \frac{\beta_1}{2u\beta} \cos \delta + \frac{u\beta}{u\beta} \sin \delta \right) \frac{ds}{u\beta s^2} =$$

$$\approx - \frac{R_0}{\sqrt{n}} \int_{s_0}^L (\sin \theta - \sin \delta) \frac{ds}{s^2}$$

avendo posto:

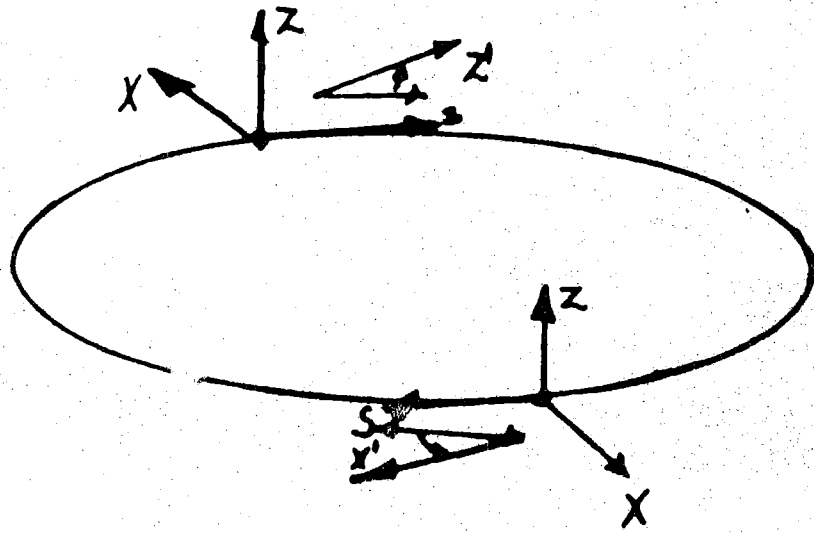
$$(29) \quad \theta = \int_{s_0}^s u\beta ds + \int_s^L u\beta ds = \int_{s_0}^L u\beta ds \approx \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - s_0)$$

$$\delta = \int_s^L u\beta ds - \int_{s_0}^s u\beta ds \approx \frac{\sqrt{n}}{R_0} (L - 2s + s_0)$$

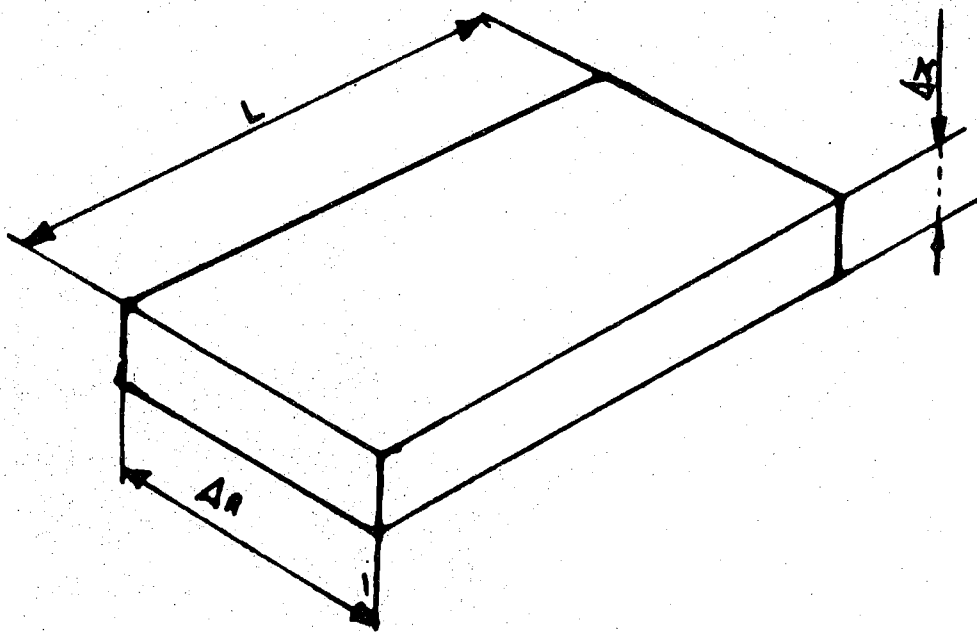
Come si vede il termine (28) è proporzionale, oltre che al fattore di smorzamento che compare anche nel primo termine, a λ . Inoltre nei termini m_{ik} , l'integrando decresce rapidamente come $1/s^2$. Pertanto il termine (28) può essere trascurato rispetto al primo.

Bibliografia

- (1) - E. Persico, "Lezioni sulle macchine acceleratrici" (C.N.E.N., Roma, 1960).
- (2) - J.J. Livingood, "Principles cyclic particle accelerators" (Van Nostrand C., London, 1961).
- (3) - K.W. Robinson, Phys. Rev. 111, 373 (1958).
- (4) - A.A. Kolomenskii and A.N. Lebedev, CERN Symposium (CERN, Geneve, 1956) vol. I, pg. 447.
- (5) - F.D. Courant and H.S. Snyder, Ann. Phys. 3, 1 (1958).
- (6) - J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 1912 (1949).
- (7) - D.H. Tombouliau and P.L. Hartman, Phys. Rev. 102, 1423 (1956).
- (8) - G. Sacerdoti, "Sviluppo in serie degli elementi di matrice di un sistema ottico costituito da una serie di quadrupoli disposti su uno stesso asse z con indice di campo $n(z)$ ", Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-62/26 (1962).
- (9) - L. Mango, "Studio dei parametri di una struttura a funzioni separate con foccheggiamento forte", Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-62/34 (1962).
- (10) - C. Pellegrini, Suppl. Nuovo Cimento 22, 603 (1961).
- (11) - P.G. Sona, "Ottica degli analizzatori magnetici nell'approssimazione di gauss. Applicazione ad un analizzatore da 1000 MeV/c. Considerazioni sull'uso della tecnica del filo per la taratura", Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-58/11 (1958).



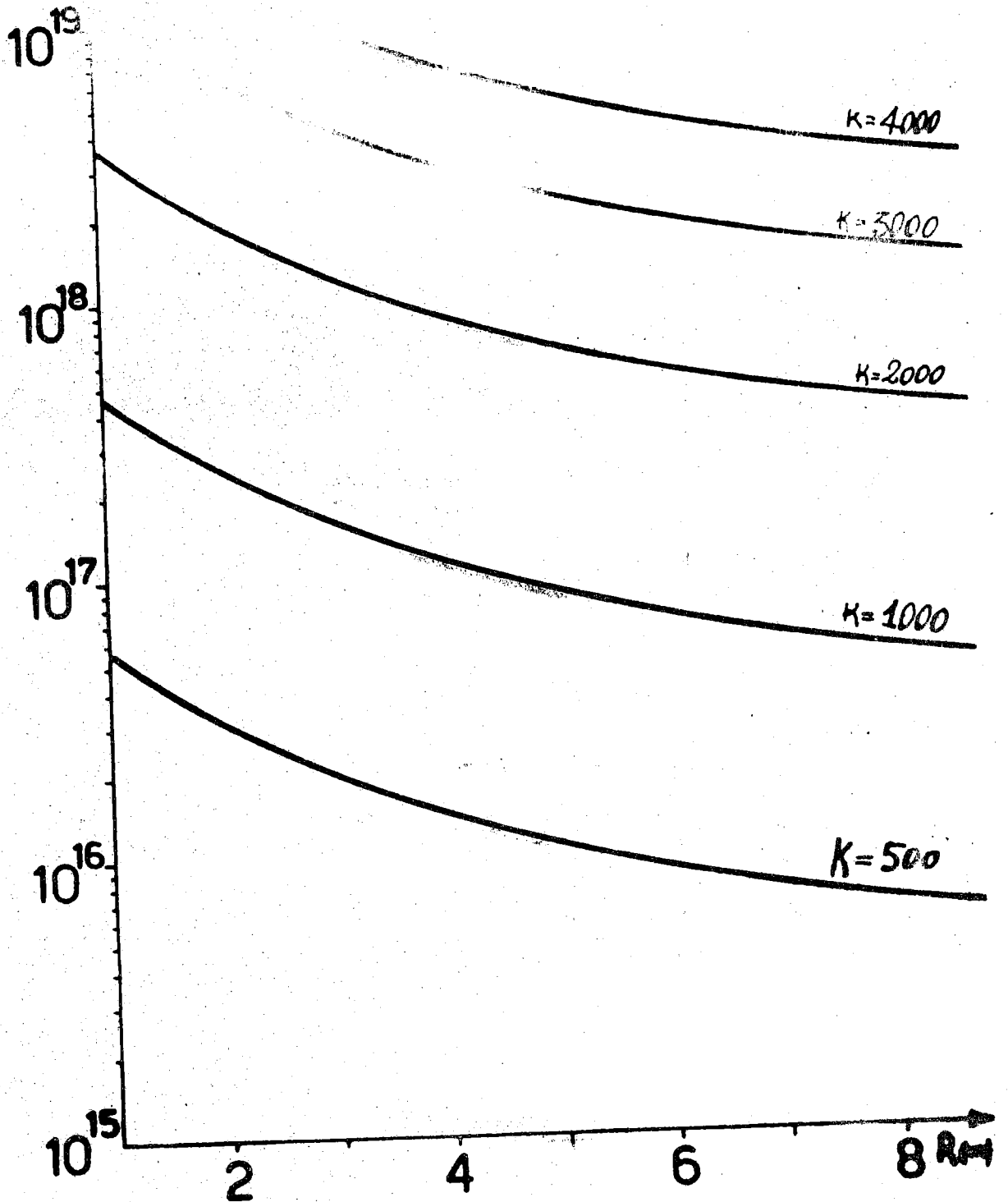
- Fig 1 -



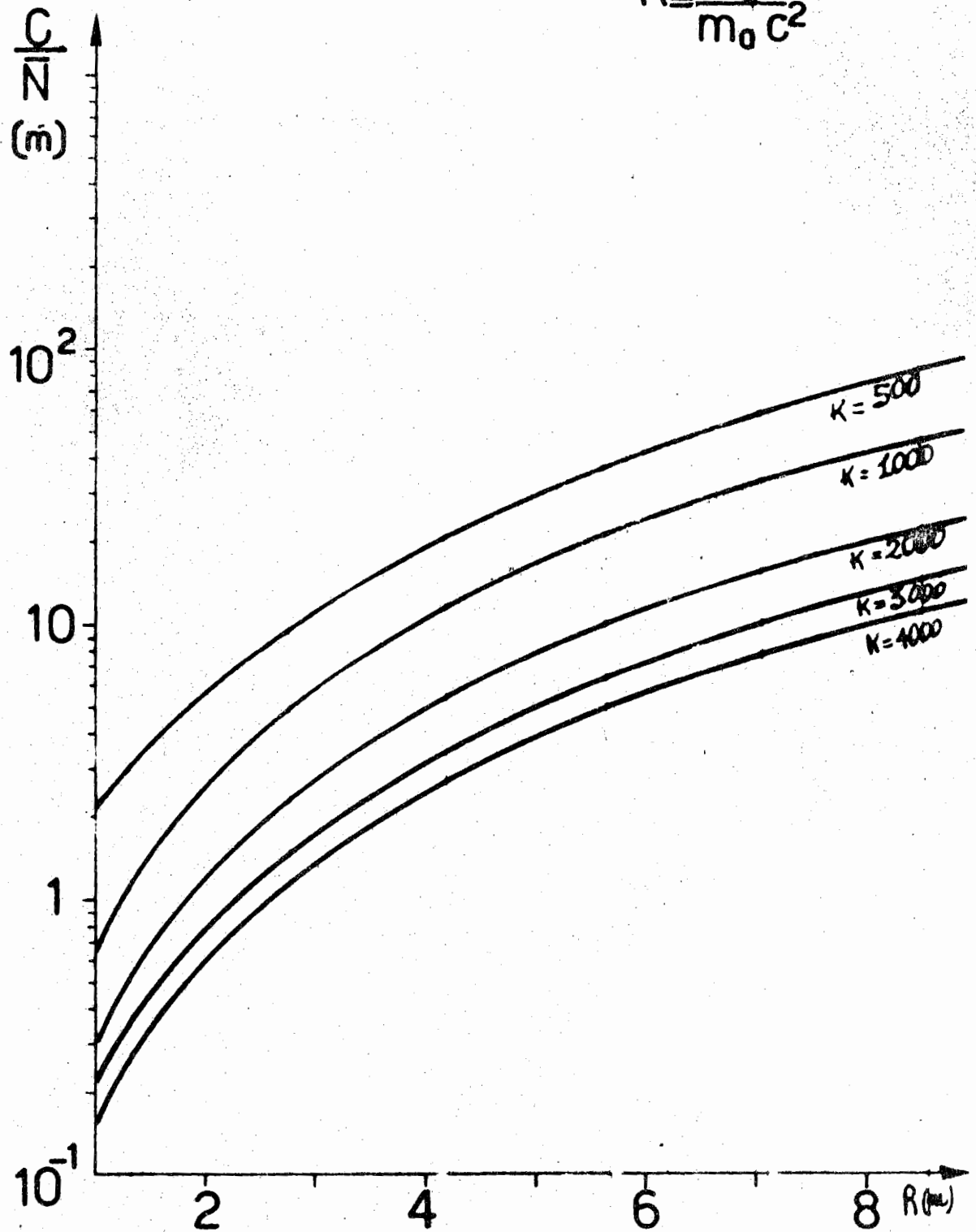
- Fig. 2 -

ω_c
(sec⁻¹)

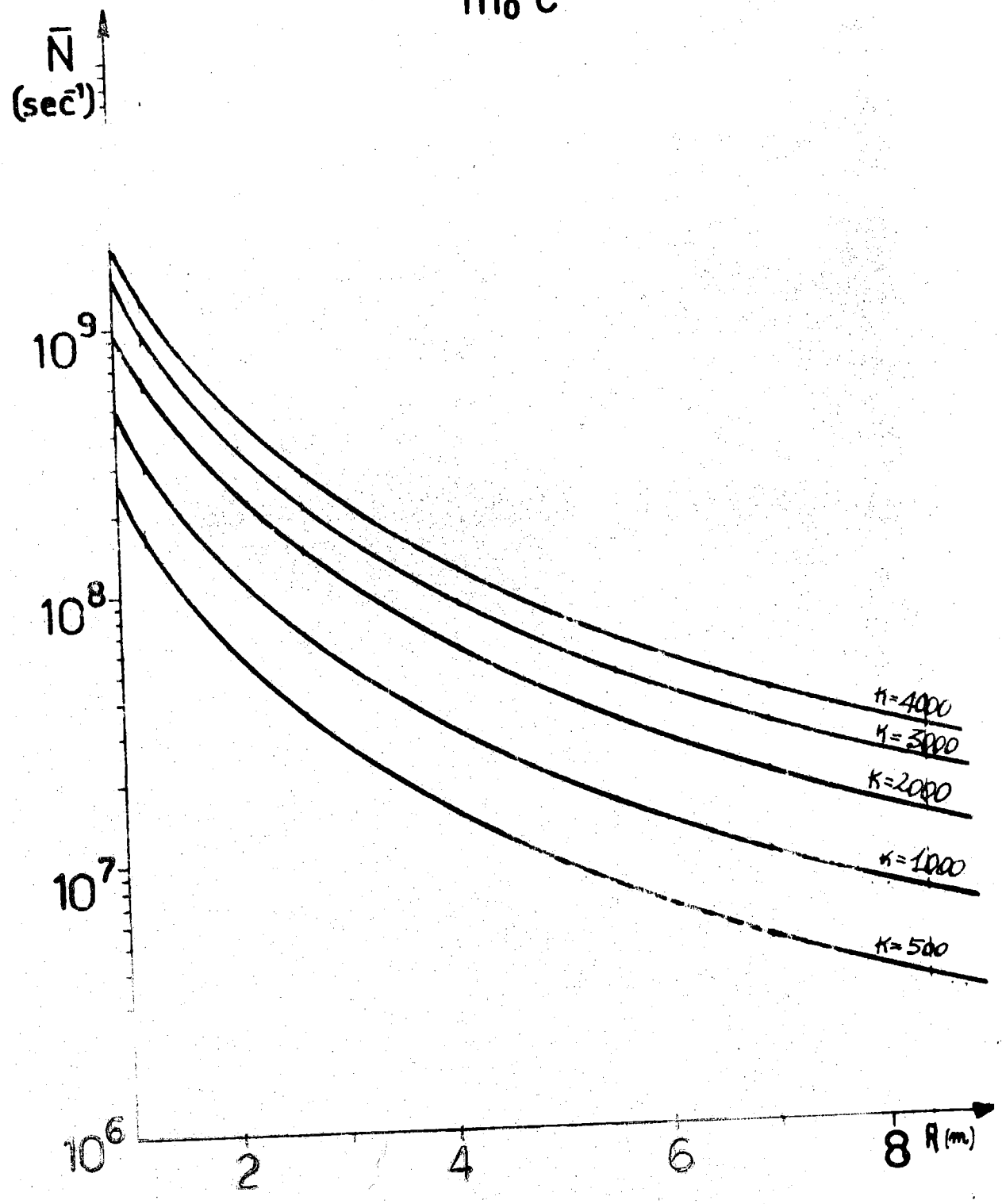
$$K = \frac{F}{m_0}$$



$$K = \frac{\gamma}{m_0 c^2}$$



$$K = \frac{\Sigma}{m_0 c^2}$$



$$K = \frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2}$$

